EXERCICE 29

I - 1) $h(x) = x - \ln x$

a) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	-	0	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ ($\frac{\ln x}{x} \to 0$)

b) h admet 1 comme minimum absolu alors

$h(x) \geq 1 \; ; \quad \forall x \in]0, +\infty[$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) f est continue sur $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = 0 = f(0)$

d' ou f est continue sur $[0, +\infty[$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x\ln x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

II) $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

$x \in [0, +\infty[$

1) a)

$F(x) = \int_1^{2x} f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et

$1 \in [0, +\infty[$

D'où la fonction :

$x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto f(x)$

* $U : x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $U([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ $\Rightarrow$
* f est continue sur $[0, +\infty[$

$x \mapsto \int_1^{2x} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est :

$x \mapsto 2f(2x)$ et par suite F est dérivable sur $[0, +\infty[$

b) pour $x > 0$

$F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$= \frac{2}{2x - \ln 2x} - \frac{1}{x - \ln x}$

$= \frac{2h(x) - h(2x)}{h(2x).h(x)} = \frac{\ln 2 - \ln x}{h(2x).h(x)}$

* $F'_d(0) = 2f(0) - f(0) = 0$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn
Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn